ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 30 AOUT 1926.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES BARROIS.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ASTRONOMIE. — *Sur la régularité du mouvement diurne et sur la possibilité de la contrôler au moyen de nos pendules.* Note de M. **Bigourdan.**

L'expérience des signaux rythmés radiotélégraphiques, acquise pendant les dernières années [1], montre que les perturbations de transmission de ces signaux (entre un point d'émission et un point de réception situés l'un et l'autre à la surface de la Terre) n'exercent sur la durée de transmission qu'une influence inférieure à $0^s,01$. Et, même en y ajoutant l'erreur de réception, surtout quand on reçoit par un bon enregistrement, l'erreur totale ne dépasse guère non plus $0^s,01$.

Il est vrai que quand on compare les heures absolues de réception des *mêmes* signaux horaires dans *divers* observatoires (après avoir tenu compte des corrections de pendule C_p et des différences de longitude ΔL), les écarts sont souvent plus de 10 fois plus grands, c'est-à-dire supérieurs à $0^s,10$ (*voir* le Tableau VII du *Bulletin horaire*). Mais cela tient visiblement à l'introduction, dans ces comparaisons, des éléments étrangers C_p et ΔL, introduction qui d'ailleurs est nécessaire pour les usages habituels des signaux.

Supposons qu'au lieu de comparer ainsi les heures corrigées ou *absolues*

---

[1] G. Bigourdan, *Sur la propagation des ondes hertziennes à grande distance : ordre de grandeur, en temps, des perturbations de propagation* [*Comptes rendus*, 176, p. 1099 (1923; obs. de 1922); — 180, p. 203 et 351 (1925; obs. de 1923)]. Ces notes sont réunies dans mes *Mélanges scientifiques*, n°s 20-22, p. 157-171.

on compare les heures non corrigées ou *brutes*. Alors les indications brutes des divers garde-temps, correspondant aux *mêmes* signaux, seraient presque aussi exactes que si tous ces garde-temps se trouvaient réunis en un seul point de la Terre, en un même observatoire.

La comparaison des nombres (A) ainsi obtenus permettrait de résoudre diverses questions intéressantes, et notamment de vérifier la parfaite régularité du mouvement diurne, c'est-à-dire la constance actuelle du jour sidéral. En effet, la confrontation de ces résultats permettrait d'abord de reconnaître et de laisser de côté les garde-temps qui auraient pu avoir un changement de marche soit *individuel*, soit *régional* à extension plus ou moins grande.

L'ensemble des autres, se servant mutuellement de *témoins*, constituerait, en dehors de toute détermination astronomique de l'heure, un *étalon* de temps artificiel, peut-être un peu arbitraire, mais parfaitement comparable à l'*étalon normal* d'aujourd'hui, savoir la durée de rotation de la Terre, constatée par les passages méridiens d'étoiles.

Si le parallélisme de marche de ces deux étalons s'est bien conservé, on pourra conclure, avec la plus haute probabilité, que l'un et l'autre se sont maintenus bien réguliers. Mais si, à un même instant, la plupart des garde-temps *témoins* avaient présenté un changement quelconque dans leur marche, on pourrait conclure aussi, surtout après quelques constatations analogues, que c'est l'effet d'une irrégularité momentanée de l'étalon normal, c'est-à-dire du mouvement diurne.

Quant à la précision que comporte cette méthode, on peut l'évaluer aujourd'hui à $0^s,001$. En effet les bonnes pendules actuelles d'observatoire ne présentent pas d'irrégularité accidentelle supérieure à $0^s,01$. Par suite cent (10^2) de ces pendules suffiraient pour donner une précision 10 fois plus grande.

La comparaison des mêmes nombres (A) aurait d'autres avantages, parmi lesquels j'indiquerai les trois suivants :

1° Mettre à la portée de chacun, et en particulier de tout laboratoire ou observatoire, un moyen fréquent de contrôler son garde-temps local, sans observation astronomique; celle-ci ne resterait nécessaire que pour comparer différentiellement les deux étalons mentionnés ci-dessus.

2° Augmenter avantageusement la solidarité qui existe entre les services astronomiques, géodésiques, géographiques, géophysiques, pour tout ce qui touche la détermination de l'heure, des longitudes, de l'intensité de la pesanteur, de la fixité relative des continents, etc.

3° Permettre une sorte de *mobilisation générale* de tous les garde-temps, et la comparaison de deux quelconques d'entre eux, rapprochés ou éloignés, c'est-à-dire d'établir des concours mondiaux tout à fait internationaux, qui sans doute feraient progresser encore la construction horlogère. D'ailleurs ce concours sans déplacement aurait son siège où chacun voudrait; aucun lieu n'aurait d'autre privilège que celui qu'il tiendrait du nombre de garde-temps qu'il possède et qu'il peut comparer à tout instant.

Il est indispensable de considérer la somme de travail ou de dépense qu'exigerait la mise en application de ce système. Or il se trouve qu'elle peut actuellement être très petite, en raison de l'opération des longitudes intermondiales qui doit avoir avoir lieu du 1er octobre au 30 novembre prochains.

Environ 50 observatoires ont proposé de participer à cette opération. Dans ce but, chacun d'eux doit, d'un côté déterminer son heure locale (ce qui n'intéresse pas directement notre application) et de l'autre observer les signaux rythmés de certains postes radiotélégraphiques (Bordeaux-Lafayette, Saïgon, Honolulu, Washington). Ces signaux rythmés sont au nombre de 306 par série, émis en 300 secondes de temps moyen. Or il est recommandé à ces observatoires d'enregistrer ces 306 signaux, et naturellement de les relever en comparaison avec leur garde-temps local. Il suffira de se communiquer mutuellement par lettre ces relevés bruts déjà obtenus dans un autre but pour pouvoir faire l'application dont nous parlons. Même il ne sera pas indispensable de communiquer les résultats des 306 : nous demandons seulement que l'on veuille bien nous communiquer les heures brutes des signaux qui, dans l'émission du poste Lafayette (20^h1^m-20^h6^m), tant en ondes longues (18900^m) qu'en ondes courtes (32^m), ont les nos 113-122 et 235-244, c'est-à-dire qui respectivement précèdent immédiatement $20^h3^m0^s$ et $20^h5^m0^s$ de t. m. Gr. Et cela aurait lieu pour 30 jours consécutifs, commençant le 15 octobre prochain inclus.

D'ailleurs les observateurs qui recevront à l'oreille auront évidemment les moyens de déterminer les heures exactes des mêmes signaux 113-122 et 235-244.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

The bloodsucking Arthropods of the Dutch East Indian Archipelago. VII. *The Tabanids of the Dutch East Indian Archipelago* (*including those of some neighbouring countries*), by J.-H. Schuurmans Stekhoven Jr.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la théorie des paralléloèdres.* Note [1] de M. **Boris Delaunay**, présentée par M. Hadamard.

Quels sont les corps convexes qui, comme les parallélépipèdes et les prismes à base hexagonale régulière, peuvent remplir l'espace en position parallèle sans cavités ? Cette question a été l'objet des recherches de Fedoroff (depuis 1881), Kelvin (1894), Minkowski (1896, 1897) et Voronoï (1908). Je me propose ici d'esquisser une théorie nouvelle complète pour l'espace ordinaire et de faire quelques remarques sur le cas de quatre dimensions.

1. Lemme. — *Un polyèdre convexe dont chaque face admet une face opposée de la même aire, possède un centre de symétrie* (Minkowski, 1897).

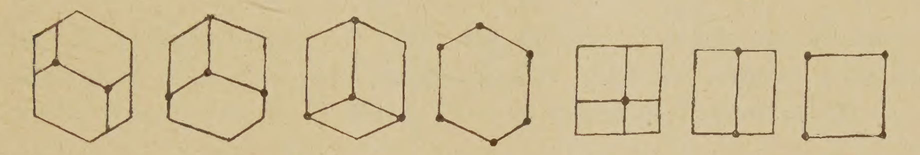
2. Je ne fais pas l'hypothèse habituelle que tous les corps sont de la même grandeur : j'appelle « paralléloèdres » des corps convexes P remplissant l'espace et *homothétiques* deux à deux. Ce sont des polyèdres. Le lemme 1 démontre que : 1° ou bien ce sont des parallélépipèdes ou des prismes hexagonaux ayant des centres de symétrie, dans ce cas ces corps peuvent ne pas être égaux ; 2° ou bien ces P sont tous égaux et sont contigus seulement par des faces entières. Dans ce cas je les appelle P normaux.

3. *Nouvelle déduction de tous les paralléloèdres normaux.* — Les faces des P ont aussi des centres et par suite chaque arête donne une zone fermée. En construisant tous les P adjacents à P_0 par les faces d'une telle zone, la projection de P, parallèlement à l'arête de cette zone, est un

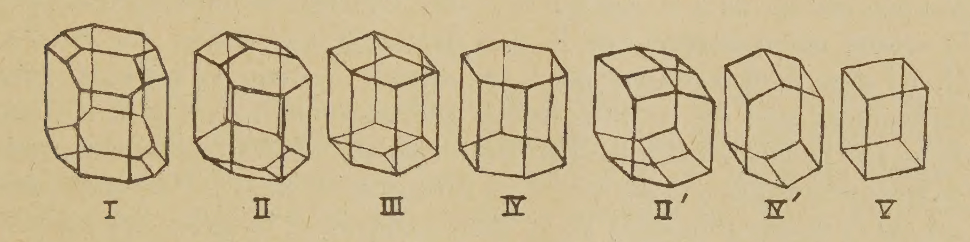
---

[1] Séance du 28 juin 1926.

parallélogramme ou un hexagone à centre. Si l'on construit tous les P adjacents à ces P seulement par les faces de cette zone, et ainsi de suite, on obtient une « couche » illimitée C_0 des P qui n'a pas de trous. Tous les centres des P de cette couche sont dans un même plan. La couche analogue C la plus rapprochée de C_0 est partout adjacente à C_0. On obtient ainsi les cas suivants (seuls possibles) des projections des P le long d'une zone fermée :



qui donnent les polyèdres



Les P_{II} et $P_{II'}$, d'un côté, et P_{IV} et $P_{IV'}$ ont les mêmes aspects au sens de Jordan. Il ne peut donc exister que 5 aspects de P normaux, les P non normaux appartiennent aussi à ces aspects (IV et V). Inversement on voit que *tout polyèdre convexe, ayant l'un de ces aspects et en plus un centre de symétrie et dont toutes les faces ont des centres de symétrie, est un* P.

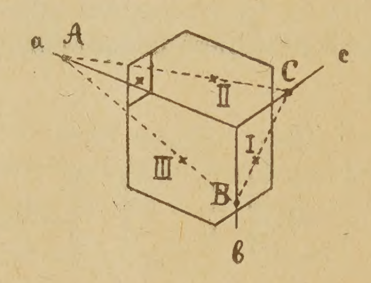
Corollaire : Si l'on fait une variation des arêtes d'une zone, en rapprochant parallèlement les calottes réunies par cette zone, le P reste un P.

4. Les centres des P normaux forment un réseau de Bravais E.

Théorème : *On peut faire une transformation linéaire* ($\star$) *de l'espace après laquelle les* P^* *seront des domaines de Dirichlet dans* E^*. J'appelle domaine de Dirichlet d'un point c de E^* le domaine D de tous les points qui sont plus près de c que de tout autre point de E^*. Il suffit de montrer qu'il existe une transformation ($\star$) après laquelle toutes les faces de P^* deviennent perpendiculaires aux droites qui joignent leurs centres au centre de P^*. La possibilité d'une telle ($\star$) a été démontrée par Voronoï analytiquement pour le cas spécial des P primitifs. Pour le cas général des P normaux à partir de $n = 4$, ce théorème n'est pas encore démontré.

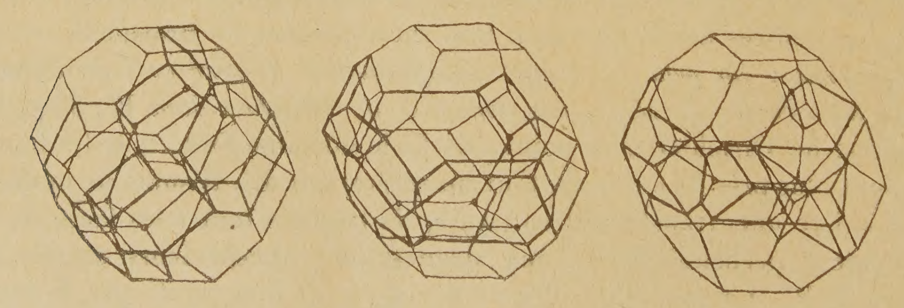
Pour $n=2$ on obtient ($\star$) quand l'ellipse circonscrite à l'hexagone devient un cercle.

Démonstration pour $n=3$. — Faisons une transformation ($\star$) auxiliaire ($\star'$) afin que : 1° les arêtes d'une zone deviennent perpendiculaires



au plan des centres de la couche de cette zone; 2° la projection de P sur ce plan soit inscrite dans un cercle r. Soit alors $\overline{\mathrm{E}}$ le système des centres des P et la calotte correspondante de P. Les droites d'intersection des faces I, II, III avec le plan passant par leurs centres forment un triangle, dont les sommets sont sur les trois droites concourantes a, b, c, et il n'existe qu'un seul tel triangle. En dilatant parallèlement à l'arête de la zone, puis variant convenablement les arêtes, on obtient donc *tous* les P à zone droite qui ont la même projection de la calotte zonaire et la même épaisseur h de la couche zonaire. Tous ces P ont le même E. Si $k>2r$ [ce que l'on peut toujours obtenir par ($\star'$)], parmi ces P se trouve aussi le domaine de Dirichlet de $\overline{\mathrm{E}}$. C. Q. F. D.

5. *Les trois types de paralléloèdres primitifs à quatre dimensions.* — En déplaçant deux réseaux de P de $n=3$ on obtient (cf. § 3) les projections des P de $n=4$ le long d'une zone fermée. En se servant des P_1 on obtient par exemple les trois types suivants des P primitifs :



C'est Voronoï qui a découvert analytiquement ces trois types (qui correspondent aux trois réduites dans la méthode de M. Charve pour les

formes quaternaires). Il a démontré que tous les D dans $n=4$ sont des cas particuliers de ces 3P. Chacun de ces 3P a 30 faces $n=3$, 150 faces $n=2$, 240 arêtes et 120 sommets. Je montre que dans $n=4$ certaines zones des P ne sont pas fermées, mais que si le P a une zone fermée il peut être transformé par ($\star$) en un D. Reste à savoir si tout P dans $n=4$ a au moins une zone fermée.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les opérations fonctionnelles linéaires échangeables avec la dérivation et sur les zéros des sommes d'exponentielles.* Note [1] de M. G. **Pólya**, transmise par M. J. Hadamard.

1. Le champ fonctionnel est constitué par l'ensemble des sommes d'exponentielles de la forme

$$a_0 e^{\lambda_0 z} + a_1 e^{\lambda_1 z} + \ldots + a_n e^{\lambda_n z} = f(z); \tag{1}$$

n est un entier, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont réels, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont réels et appartiennent à un intervalle donné I. Tous ces nombres sont arbitraires, à part les conditions énoncées. Nous considérons une opération fonctionnelle **L** qui est déterminée par la donnée d'une fonction $L(x)$, analytique et à valeurs réelles en I, et qui transforme la somme d'exponentielles $f(z)$ en

$$\mathbf{L} f(z) = L(D) f(z) = L(\lambda_0) a_0 e^{\lambda_0 z} + L(\lambda_1) a_1 e^{\lambda_1 z} + \ldots + L(\lambda_n) a_n e^{\lambda_n z}.$$

Problème I. — *Déterminer la transformation* **L** *la plus générale qui conserve les racines réelles des sommes d'exponentielles* (1) *en ce sens que* $\mathbf{L} f(z)$ *n'a pas moins de racines réelles que* $f(z)$.

$L(x)$ est soit un polynome à racines toutes réelles, soit une fonction entière limite de polynomes de cette nature et $L(x)$ n'a pas de racine dans l'intervalle I.

Problème II. — *Déterminer la transformation* **L** *la plus générale conservant les sommes d'exponentielles de signe constant, c'est-à-dire ayant la propriété que* $\mathbf{L} f(z)$ *n'a pas de racine réelle d'ordre impair si* $f(z)$ *n'en a pas.*

$L(x)$ [ou $-L(x)$] est soit une somme d'exponentielles à coefficients a_ν positifs, soit une limite de sommes de cette nature dans l'intervalle I. En

---

(1) Séance du 9 août 1926.

d'autres termes

$$\text{(2)} \qquad L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xu}\, d\Phi(u)$$

et x se trouve dans I, $\Phi(u)$ étant monotone.

PROBLÈME III. — *Déterminer la transformation* **L** *la plus générale telle que la plus grande racine réelle d'ordre impair de* **L** $f(z)$ *ne soit pas supérieure à la racine analogue de* $f(z)$.

$L(x)$ [ou $-L(x)$] est soit une somme d'exponentielles à coefficients a_ν et exposants λ_ν positifs, soit limite de sommes de cette nature dans l'intervalle I. En d'autres termes, (2) est valable avec la restriction additionnelle que $\Phi(u)$ est constante pour $u < 0$.

2. On peut résoudre encore d'autres problèmes analogues, modifier le champ fonctionnel et trouver des cas particuliers curieux. Je mentionne le suivant :

Si le polynome

$$a_0 + \frac{a_1}{1!}z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \frac{a_3}{3!}z^3 + \ldots$$

n'a que des racines réelles négatives, le polynome

$$a_k + \frac{a_{k+l}}{1!}z + \frac{a_{k+2l}}{2!}z^2 + \frac{a_{k+3l}}{3!}z^3 + \ldots$$

aura la même propriété $(k \geqq 0, l \geqq 1)$.

Ce théorème est le *meilleur* de son espèce, c'est-à-dire qu'on peut en déduire tous les autres de nature analogue, par exemple le suivant :

Si le polynome

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

n'a que des racines réelles négatives, le polynome

$$a_k + a_{k+l} z + a_{k+2l} z^2 + a_{k+3l} z^3 + \ldots$$

aura la même propriété $(0 \leqq k < l)$.

Les deux théorèmes s'étendent aux fonctions entières qui sont limites de polynomes à racines toutes négatives. Ainsi, en appliquant le second théorème à la série exponentielle, on obtient que la fonction entière

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(1+k+nl)} \qquad (-1 < k < l,\ l \geqq 2)$$

n'a que des zéros réels, pourvu que k, l soient des entiers.

Dans certains exemples, la dernière restriction s'est montrée superflue.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la représentation analytique d'une classe de fonctions continues.* Note [1] de Mlle N. Bary, transmise par M. Émile Borel.

1. Dans un article récent [2], M. Banach considère la classe des fonctions continues vérifiant la condition (S) qu'il définit de la manière suivante : une fonction continue $f(x)$ satisfait à la condition (S) lorsque à chaque nombre $\varepsilon < 0$ correspond un nombre $\eta > 0$, de manière que $|E| < \eta$ entraîne $|Ey| < \varepsilon$ [3]. M. Banach démontre que la condition (S) est équivalente à l'ensemble des conditions (N) et (T_1). On dit, avec M. Lusin [4], que $f(x)$ vérifie la condition (N) lorsque mes $E = 0$ implique toujours mes $Ey = 0$. On dit, avec M. Banach [2], que $f(x)$ jouit de la propriété (T_1) si l'ensemble des valeurs, que la fonction $f(x)$ prend une infinité de fois, est de mesure nulle.

Le but de cette Note est de démontrer que *la classe des fonctions vérifiant la condition* (S) *ou, ce qui revient au même, les conditions* (N) *et* (T_1), *coïncide avec celle des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.*

Nous dirons qu'une fonction continue $f(x)$ jouit de la propriété (V) si l'ensemble Ey des valeurs de $f(x)$ sur l'ensemble E, où la dérivée $f'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie, est de mesure nulle. M. Menchoff et moi avons démontré récemment [5] que, pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit une fonction absolument continue de fonction absolument continue, il faut et il suffit qu'elle jouisse de la propriété (V). Le théorème à établir se réduit ainsi à la démonstration de *l'équivalence de la condition* (V) *et de l'ensemble des conditions* (N) et (T_1).

---

(1) Séance du 17 août 1926.

(2) *Sur une classe de fonctions continues* (*Fundam. Mathem.*, 8, 1926, p. 166-172).

(3) En conservant les notations de M. Banach, E étant un ensemble quelconque, nous désignerons toujours par Ey l'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur E; $|E|$ est la mesure extérieure de E.

(4) *L'intégrale et la série trigonométrique* (en russe), Moscou, 1915, p. 109.

(5) *Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues* (*Comptes rendus*, 182, 1926, p. 1373).

Je profite de l'occasion pour indiquer qu'il y a dans cette Note une ligne à ajouter : la phrase qui précède le théorème II (p. 1374) doit être lue ainsi : « Mais dans le cas remarquable d'une fonction de la forme $f[\varphi(x)]$ *où les extrêmes absolus de* $\varphi(x)$ *sont aux bornes de l'intervalle* (a, b), on a le théorème II ».

2. *Supposons que $f(x)$ jouisse de la propriété* (V). — Soit E l'ensemble des points où $f(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie et e un ensemble de mesure nulle quelconque. On a $e = e^{(1)} + e^{(2)}$, $e^{(1)}$ étant la partie de e contenue dans E et $e^{(2)}$ les points de e où $f'(x)$ est déterminée et finie. En vertu de la propriété (V) on a $\operatorname{mes} e_y^{(1)} = 0$; d'ailleurs on a $\operatorname{mes} e_y^{(2)} = 0$; puisque $\operatorname{mes} e^{(2)} = 0$ et $f(x)$ existe sur $e^{(2)}$. Il en suit que $\operatorname{mes} e_y = 0$; e étant un ensemble de mesure nulle arbitraire, la fonction $f(x)$ jouit donc de la propriété (N).

Soit y_0 une valeur que $f(x)$ prend une infinité de fois. L'ensemble des points x tels que $f(x) = y_0$ a au moins un point limite x_0. Il est évident que la dérivée $f'(x_0)$ n'existe pas ou bien est égale à zéro. Mais si une fonction continue a une dérivée nulle sur un certain ensemble, l'ensemble de ses valeurs sur cet ensemble est de mesure nulle. Il suit de cette remarque et de la propriété (V) que l'ensemble des valeurs y que la fonction $y = f(x)$ prend une infinité de fois est de mesure nulle, $f(x)$ jouit donc de la propriété (T_1) (1).

Supposons maintenant que $f(x)$ jouisse des propriétés (N) et (T_1). — Soit H l'ensemble des valeurs que $f(x)$ prend une infinité de fois et R l'ensemble de tous les points x tels que les valeurs de $f(x)$ en ces points n'appartiennent pas à H. Soit D l'ensemble de tous les points où $f(x)$ atteint son maximum ou son minimum propre; D est au plus dénombrable (A. Denjoy). On voit d'après la définition même de R et de D qu'en tout point de R qui n'appartient pas à D tous les nombres dérivés de $f(x)$ ont même signe. Il s'ensuit (2) que la dérivée $f'(x)$ est déterminée et finie presque partout sur $R - D$, donc presque partout sur R (3). Les points où $f(x)$ est indéterminée ou infinie ne se trouvent donc que hors de R ou dans un ensemble de mesure nulle sur R. Les valeurs de $f(x)$ pour les points de x n'appartenant pas à R forment l'ensemble H qui est de mesure nulle puisque $f(x)$ jouit de la propriété (T_1); les valeurs de $f(x)$ sur un ensemble de mesure nulle forment un ensemble de mesure nulle puisque $f(x)$ jouit de la propriété (N). Nous voyons donc que $f(x)$ jouit de la propriété (V) et l'équivalence de (V) et de l'ensemble des propriétés (N) et (T_1) est ainsi démontrée.

---

(1) Ce raisonnement est dû à M. Menchoff.

(2) Voir Saks, *Fund. Math.*, 5, 1924, p. 98-104.

(3) Cf. Banach, *loc. cit.*, p. 170.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur l'intégration des suites de fonctions totalisables.* Note [1] de M. A. **Kovanko**, transmise par M. Émile Borel.

Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., une suite (1) de fonctions totalisables (intégrables-Denjoy) sur $(a \leqq x \leqq b)$ qui converge presque partout sur (a, b) vers $f(x)$.

Lemme. — Quel que soit l'ensemble parfait P et l'intervalle (c, d), il existe dans (c, d) un intervalle (c', d') tel que, sur la partie P′ de P, située dans (c', d'); $f_n(x)$ est sommable pour tout $n > \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ suffisamment grand), et, de plus, $\lim_{n=\infty}(\mathfrak{L})\int_{\tilde{\mathrm{E}}} f_n(\alpha)\,d\alpha$ ($\tilde{\mathrm{E}}$ toute partie mesurable de P′) est une fonction absolument continue et additive de l'ensemble $\tilde{\mathrm{E}}$.

En nous servant de ce lemme, nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème I. — Soit $\mathfrak{I}(\tilde{\mathrm{E}}) = \lim_{n=\infty}(\mathfrak{D})\int_{\tilde{\mathrm{E}}} f_n(\alpha)\,d\alpha$ [2] une fonction de l'ensemble mesurable $\tilde{\mathrm{E}}$ (elle est bien déterminée pour une infinité d'ensembles $\tilde{\mathrm{E}}$ à cause de notre lemme), qui possède toutes les propriétés de l'intégrale de Denjoy, c'est-à-dire que $\mathfrak{I}(\tilde{\mathrm{E}})$ est la totalisation de quelque fonction $\varphi(x)$. Donc [3] :

1° Quel que soit l'ensemble parfait P, l'ensemble des points, où $\mathfrak{I}(\tilde{\mathrm{E}})$ est absolument continue et additive, est partout dense sur P;

2° $\mathfrak{I}(\tilde{\mathrm{E}})$ existe si $\tilde{\mathrm{E}}$ est un intervalle quelconque (c, d), de plus,

$$\lim_{\substack{c'=c\\ d'=d}} \mathfrak{I}(\overline{c'd'}) = \mathfrak{I}(\overline{c, d}) \qquad [(c'd') \text{ situé dans } (c, d)];$$

3° Quel que soit l'ensemble parfait P, l'ensemble P′ pour lequel la série ΣW_n est convergente [W_n désignant la valeur maximum $|\mathfrak{I}(x_1, x_2)|$ quand (x_1, x_2) prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle δ_n contiguë à P′] est partout dense sur P.

---

[1] Séance du 17 août 1926.

[2] $(\mathfrak{D})\int_{\mathrm{E}} \varphi(\alpha)\,d\alpha = (\mathfrak{D})\int_a^x \varphi_1(\alpha)\,d\alpha$, où $\varphi_1(\alpha) = \varphi(x)$ sur $\tilde{\mathrm{E}}$; $\varphi_1(x) = 0$ hors de $\tilde{\mathrm{E}}$.

[3] Voir Denjoy, *Comptes rendus*, 154, 1912, p. 859-862.

Alors $f(x)$ est totalisable, et, de plus,

$$\lim_{n=\infty}(\mathcal{D})\int_a^x f_n(\alpha)\,d\alpha = (\mathcal{D})\int_a^x f(\alpha)\,d\alpha \qquad \text{et } \textit{vice versa}.$$

Si la suite (1) converge en mesure vers $f(x)$, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — Si le lemme énoncé a lieu pour la suite (1) et si de plus

$$\lim_{n=\infty}(\mathcal{D})\int_{\tilde{E}} f_n(\alpha)\,d\alpha$$

est une fonction qui possède toutes les propriétés caractéristiques de l'intégrale de Denjoy (voir théorème I), alors $f(x)$ est totalisable et

$$\lim_{n=\infty}(\mathcal{D})\int_a^x f_n(\alpha)\,d\alpha = (\mathcal{D})\int_a^x f(\alpha)\,d\alpha \qquad \text{et } \textit{vice versa}.$$

Comme cas particulier nous avons l'intégration des suites de fonctions sommables.

Dans ce cas, si $\lim_{n=\infty}(\mathcal{L})\int_{\tilde{E}} f_n(\alpha)$ est une fonction absolument continue et additive de l'ensemble $\tilde{E}$, nous avons (1)

$$\lim_{n=\infty}(\mathcal{L})\int_{\tilde{E}} f_n(\alpha)\,d\alpha = (\mathcal{L})\int_{\tilde{E}} f(\alpha)\,d\alpha.$$

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur la convergence des séries de la Mécanique céleste.* Note (2) de **Kyrille Popoff**, transmise par M. Paul Appell.

Dans une Note du 27 février 1882 à l'Académie des Sciences sur les intégrales d'un système d'équations différentielles, H. Poincaré fait la transformation conforme du domaine d'holomorphie des intégrales, considérées comme fonctions de la variable indépendante, sur un cercle et obtient ainsi des séries qui représentent les intégrales dans le domaine d'holomorphie. Plus tard (*Acta mathematica*, 31, 1907), il arrive à attirer dans ses considérations aussi les points critiques algébriques et les pôles.

(1) Voir ma Note (*Comptes rendus*, 182, 1926, p. 562) avec les errata insérés, 183, 1926, p. 436.

(2) Séance du 23 août 1926.

M. Sundman (*Acta mathematica*, t. 36, 1912-1913), en s'inspirant des idées de Poincaré, traite le problème des trois corps et arrive à des développements suivant les accroissements d'une variable, fonction du temps, valables pour toute valeur réelle de t. Mais en Mécanique céleste, on emploie des développements suivant certains paramètres tels que l'excentricité et la masse. L'objet de ce travail est d'appliquer à ces développements le point de vue de Poincaré.

Premier exemple : *Séries du mouvement elliptique suivant les puissances de l'excentricité*. — On sait, d'après Laplace, que ces séries ne restent convergentes pour toutes les valeurs de l'anomalie moyenne (M) qu'autant que l'excentricité (ε) est inférieure à 0,6627. Il est facile à montrer que par une simple transformation on arrive à rendre ces séries convergentes pour toutes les valeurs réelles de l'excentricité de 0 à $+1$. En effet, dans ce cas, la convergence est gênée par les points singuliers de l'anomalie excentrique (u) définie comme fonction de l'excentricité par l'équation de Képler

$$u - \varepsilon \sin u = M.$$

Or M. L. Charlier a démontré [1] qu'on n'a pas de points singuliers dans le plan de l'excentricité (considérée comme une quantité complexe) dans un domaine bien déterminé dont le contour est une courbe convexe, symétrique par rapport à l'origine, présentant des pointes aux points $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = +1$, et coupant l'axe imaginaire à des distances 0,6627 ... de l'origine. Soit maintenant $e = \varphi(\varepsilon)$ la fonction qui donne la transformation conforme du domaine ci-dessus (ou bien du quadrilatère inscrit, dont les sommets coïncident avec les sommets de la courbe) sur un cercle de rayon 1 de façon qu'on ait $0 = \varphi(0)$ et que le point $+1$ du plan ε corresponde au point $+1$ du plan e. Les séries deviennent ainsi des fonctions holomorphes de e dans le cercle et par conséquent les développements suivant les puissances de e sont valables pour toutes les valeurs réelles de ε entre -1 et $+1$. Les coefficients des séries suivant les puissances de e se déduisent facilement des coefficients des séries suivant ε.

Autre exemple : *Le problème des trois corps*. — Ici on développe suivant les puissances des masses. Le rayon de ces séries tendant vers zéro avec t^{-1}, pour des grandes valeurs de t, les masses des planètes étudiées restent en dehors du cercle de convergence. Ces séries, d'une convergence limitée dans le temps, servent pourtant de base aux théorèmes dits de stabilité du système

---

(1) C.-L. Charlier, *Mechanik des Himmels*, 2, p. 270.

solaire. Pour rendre ces séries convergentes pour une période aussi grande qu'on le veut, considérons les équations du mouvement qui, d'après les notations de Poincaré (*Leçons de Mécanique céleste*, I), peuvent s'écrire

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9)$$

avec $F = F_0 + F_1$. Ici F_0 est la partie principale de la fonction perturbatrice et contient la masse d'une des planètes en facteur; F_1 est de l'ordre du produit des masses des deux planètes.

Introduisons les équations

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx'_i},$$

avec

$$\Phi = F_0 + \mu F_1,$$

lesquelles pour $\mu = 1$ représentent les équations du problème des trois corps. On démontre que les intégrales de ces équations sont des fonctions holomorphes du paramètre μ dans une bande du plan de μ, qui contient l'intervalle réel $(-1, +1)$ et que la largeur de cette bande dépend de la grandeur de l'intervalle de t et reste différente de zéro pour des valeurs finies de t. La transformation conforme de cette bande sur un cercle permet de rendre les séries convergentes pour $\mu = 1$ dans l'intervalle de t que nous avons choisi arbitrairement grand [1].

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la méthode de N. Kryloff pour l'intégration approchée des équations de la physique mathématique.* Note [2] de M. **Krawtchouk**, transmise par M. Hadamard.

M. N. Kryloff (*Comptes rendus*, 180, 1925; 181, 182, 1926) a étudié, entre autres, pour l'intégration approchée du système

$$(1) \qquad L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = f(x), \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

la méthode nommée par lui la *méthode des moindres carrés*, et basée sur la

---

[1] Voir ma Note *Sur la convergence des séries de la Balistique extérieure* (*Comptes rendus*, 183, 1926, p. 266).

[2] Séance du 17 août 1926.

minimisation de l'intégrale $\int_0^1 [L(y) - f]^2 dx$, au moyen des sommes finies de la forme $y_m = \sum_1^m a_i^{(m)} \varphi_i(x)$, où $\varphi_i(k)$ sont les fonctions aisément calculables (par exemple les sinus). Dans le cas où $A^{(r)}(x)$ et $f^{(r)}(x)$ vérifient la condition de Lipschitz d'ordre d, on aura, d'après les recherches susdites de M. N. Kryloff,

$$(2) \qquad \int_0^1 [L(u_m)]^2 dx < [\varepsilon_m^{r+d}]^2, \qquad |u_m| < \varepsilon_m^{r+d}, \qquad |u'_m| < \varepsilon_m^{r+d},$$

où $u_m = y - y_m$ et ε_m^{r+d} a l'ordre de la petitesse de $\frac{1}{m^{r+d}}$. Le but de cette Note est la détermination de l'ordre de petitesse de $y^{(j)} - y_m^{(j)}$ $(j = 2, 3, \ldots)$ et par suite l'étude de la convergence des dérivées de l'ordre plus haut de y_m.

Soit $y'_m = \sum_{k=1}^m b_i^{(m)} \cos \pi kx$, et posons

$$(3) \qquad Y_m^{(j)} = \frac{1}{(2y_m)^{j-1}} \int_{x-y_m}^{x+y_m} \cdots \int_{x-y_m}^{x+y_m} y_m^{(j)} dx^{j-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, r+2);$$

alors, en vertu de $\frac{\sin \pi k y}{y} = \pi k - \frac{y^2}{6}(\pi k)^3 + \frac{y^4}{120}(\pi k)^5 - \ldots$, on aura

$$(4) \qquad Y_m^{(j)} = y_m^{(j)} + d_1 y_m^2 y_m^{(j+2)} + d_2 y_m^4 y_m^{(j+4)} + \ldots,$$

où d_i sont tels que $\frac{\sin y}{y} = 1 + d_1 y^2 + d_2 y^4 + \ldots$.

D'autre part, vu l'inégalité $\int_a^b |L(u_m)| dx < \varepsilon_m^{r+d} \sqrt{b-a}$ $(0 \leqq a \leqq b \leqq 1)$, qu'on tire immédiatement de (2), on aura

$$(5) \qquad \left| \frac{1}{(2\eta_m)^{j-1}} \int_{x-y_m}^{x+y_m} \cdots \int_{x-y_m}^{x+y_m} (y^{(j)} - y_m^{(j)}) dx^{j-1} \right|$$
$$= \left| \frac{u'_m(x + \overline{j-1}\, y_m) - \overline{j-1}\, u'_m(x + \overline{j-3}\, y_m) + \ldots + u'_m(x - \overline{j-1}\, y_m)}{(2\eta_m)^{j-1}} \right| < \frac{\varepsilon_m^{r+d}}{\sqrt{(\eta_m)^{2j-1}}},$$

d'où, d'après le théorème de la moyenne, on tire

$$(6) \qquad |y^{(j)}(x + \overline{j-1}\, \theta_m \eta_m) - Y_m^{(j)}| < \frac{\varepsilon_m^{r+d}}{\sqrt{(y_m)^{2j-1}}} \qquad (0 \leqq \theta_m \leqq 1),$$

et ceci, si l'on prend $\lim_{m \to \infty} \eta_m = 0$, $\lim_{m \to \infty} \frac{\varepsilon_m^{r+d}}{\sqrt{(\eta_m)^{2j-1}}} = 0$, donne lieu pour $j \leqq r + 2$

à la conclusion

$$y^{(j)} = \lim_{m \to \infty} Y_m^{(j)},$$

où l'ordre de petitesse de $Y_m^{(j)} - y^{(j)}$ peut être fixé en correspondance avec celui de γ_m.

Or, d'après le théorème de Bernstein et De la Vallée-Poussin concernant les dérivées des sommes trigonométriques, on a $|y_m^{(l+1)}| < K m^l$ (où K est indépendant de l), donc on voit, d'après (4) et (6), que pour $j < \frac{2}{3}(r+d) + \frac{1}{2}$, $\eta_m = \varepsilon_m \frac{r+d}{j+\frac{1}{2}} + \frac{3}{2j+1}$, l'ordre de petitesse de $y^{(j)} - y_m^{(j)}$ est non moindre que $\frac{r+d}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \frac{j-\frac{1}{2}}{j+\frac{1}{2}}$.

Soit encore

$$y_{m,k}^{[j]} = y_m^{(j)} + d_1 \eta_m^2 y_m^{(j+2)} + \ldots + d_k \eta^{2k} y_m^{(2j+k)}:$$

alors, pour $\alpha > \frac{1}{2}$, on peut toujours prendre k et γ_m telles que

$$y^{(r+2)} = \lim_{m \to \infty} y_{m,k}^{[r+2]}$$

et l'ordre de petitesse de $y^{(r-2)} - y_{m,k}^{[r+2]}$ pourra aussi être fixé.

Enfin, vu l'inégalité

$$\left| \int_0^1 A(x) u_m^2 - u_m'^2 \,|\, dx = \left| \int_0^1 L(u_m) u_m \right| dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 [L(u_m)]^2 dx \int_0^1 u_m^2 \, dx},$$

(utilisée aussi par M. Kryloff pour la démonstration de la convergence de sa méthode), tous les résultats de cette Note se transportent immédiatement à la méthode de Ritz, et tout porte à croire que ceci aura lieu aussi pour la méthode de N. Kryloff (182, 1926), qui comprend comme cas particuliers la méthode de Ritz ainsi que celles des moindres carrés.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la justification du principe de Rayleigh par l'ordre de l'erreur commise à la $n^{ième}$ approximation.* Note [1] de MM. N. **Bogoliouboff** et N. **Kryloff**, transmise par M. Hadamard.

En mécanique statistique, il est bien connu que le passage du discret au continu peut être fait de deux manières différentes, savoir : 1° sur les

(1) Séance du 17 août 1926.

équations du problème en leur substituant des équations différentielles ; 2° sur les solutions de ces équations aux différences finies et la question se pose si ces deux voies sont équivalentes. Ce *principe de Rayleigh* a été fondamental (Rayleigh, H. Poincaré) en Physique mathématique; sa justification qui, malgré bien des travaux (Plancherel, Robbins, Richardson), reste, ce nous semble, incomplète, est l'objet de cette Note.

I. Si $y(x)$ et $y^{(n)}(x_k)$ vérifient respectivement les systèmes (1) et (2),

$$(1)\qquad \frac{d^2y(x)}{dx^2}=q(x)y(x)+f(x),\qquad y(b)=y(a)=0\qquad [q(x)>0];$$

$$(2)\qquad \frac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2}=q(x_k)y_k^{(n)}+f(x_k)\quad (k=0,\ldots,n-2),\qquad y_0^{(n)}=y_n^{(n)}=0,\quad \Delta x=\frac{b-a}{n};$$

alors

$$(3)\qquad [y^{(n)}(x_k)-y(x_k)]=[y_k^n-y_k]=-\sum_0^n C(x_k,\,t_i)\,q_i[y_i^{(n)}-y_i]\Delta t+\varepsilon_k^{(n)},$$

où $C(x,t)$ est la fonction de Green et

$$\varepsilon_n=-\left[\sum_0^n C(x_k,\,t_i)q_iy_i\Delta t-\int_a^b C(x_k,\,t)q(t)y(t)\,dt\right]+[F_n(z_k)-F(x_k)],$$

$$F(x)=-\int_a^b C(x,\,t)f(t)\,dt,\qquad F_n(x_k)=-\sum_0^n C(x_k,\,t_i)f(t_i)\,\Delta t;$$

on déduit de (3), en se souvenant que dans le cas considéré

$$\sum_k^n\sum_i^n C(x_k,\,t_i)q_iq_kh_ih_k\Delta x\,\Delta t>0,$$

$$\sum_{k=0}^n q_k[y_k^{(n)}-y_k]^2\Delta x\leqq\sum_{k=0}^n q_k\varepsilon_n[y_k^{(n)}-y]\,\Delta x<\max|\varepsilon_n|^2 g;$$

en appliquant la même inégalité à (3) et en utilisant la propriété de la fonction de Green, on s'assure que $|y_k^{(n)}-y_k|<M|\varepsilon_k^{(n)}|$, où $M=\text{const.}$ et $|\varepsilon_k^{(n)}|$ sera de l'ordre de la petitesse de $\frac{1}{n^2}$, si $f'(x)$ et $q'(x)$ vérifient par exemple la condition de Lipschitz.

II. L'étude du cas général (avec paramètre λ) aboutit à la formule

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^n q_i[y_i^{(n)}-y_i]\,\Delta t<\frac{2}{|\lambda-\lambda_k^{(n)}|^2}\sqrt{\sum_{i=0}^n\frac{[\varepsilon_i^{(n)}]^2}{q_i}\Delta t}+2\sum_{i=0}^n\varepsilon_i^{(n)}q_i\Delta t\leqq\frac{M}{d}\varepsilon_i^{(n)},$$

où $\lambda-\lambda_k=d$, λ_k et $\lambda_k^{(n)}$ étant les valeurs singulières du paramètre relatives

respectivement à l'équation différentielle et à l'équation aux différences; par le même artifice on tire de (4) l'ordre de petitesse de $|y_i^{(n)} - y_i)$, en supposant que l'ordre de $|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}|$ est $\frac{1}{n}$.

III. Pour trouver cet ordre et pour le calcul des fonctions fondamentales $\varphi_k(x)$, on procède de proche en proche; ici on se bornera à l'indication relative au calcul de λ_1 et de $\varphi_1(x)$. On a

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} - \frac{1}{\lambda_1} &= \sum_{i,j}^{n} C_{ij} h_i^{(n)} h_j^{(n)} \Delta^2 - \int_0^1 \int_0^1 C(x,t)\varphi_1(x)\varphi_1(t)\,dt\,dx \\ &= \left[\sum_{ij}^{n} C_{ij} h_i^{(n)} h_j^{(n)} \Delta^2 - \sum_{i,j}^{n} C_{ij} h_i h_j \Delta^2 \right] \\ &\quad + \left[\sum_{i,j}^{n} C_{ij} h_i h_j \Delta^2 - \int_0^1 \int_0^1 C(x,t)\varphi_1(x)\varphi_1(t)\,dx\,dt \right] \\ &\leq \left| \sum_{ij}^{n} C_{ij} h_i h_j \Delta^2 - \int_0^1 \int_0^1 C(x,t)\varphi_1(x)\varphi_1(t)\,dx\,dt \right|, \end{aligned}$$

où $\sum_1^n q_i h_i^2 \Delta_1 = 1$;

$$(6)\qquad \sum_1^n q_i h_i^{(n)2} \Delta = 1,$$

les $h_i^{(n)}$ étant les valeurs de h_i rendant maximum $\sum_{ij}^{n} C_{ij} h_i h_j \Delta^2$ sous la condition (6); en utilisant dans (5) le théorème de la moyenne et en y posant

$$h_i = \varphi_1(\varepsilon_i)\frac{q(\varepsilon_i)}{q(x_i)},$$

on aura l'ordre $1/\lambda_1^{(n)} - 1/\lambda_1$. Pour trouver $|\varphi_1(x) - \varphi_1^{(n)}(x)|$, partons de

$$(7)\qquad \frac{\Delta^2 \varphi_i(x_i)}{\Delta x^2} + \lambda_1^{(n)} q(x_i)\varphi_1(x_i) = \varepsilon_n(x_i),$$

où l'ordre de

$$\varepsilon_n(x_i) \doteq \left[\frac{\Delta^2 \varphi_1(x_i)}{\Delta x^2} - \frac{d^2 \varphi_1(x_i)}{dx^2} \right] + (\lambda_1^{(n)} - \lambda_1)\, q(x_i)\varphi_1(x_i)$$

peut être évalué, car $\frac{d^3 \varphi_1}{dx^3}$ est uniformément borné. En appliquant à (7) une

formule analogue à celle de Schmidt, nous aurons, d'après la condition

$$\int_a^b q(x)\,\varphi_1^{(n)}(x)\,dx = 1: \quad C \geqq \sqrt{1 - \frac{\eta}{n^2}\,\frac{\varepsilon_n^2(b-a)\max|q(x)|}{[\lambda_2^{(n)} - \lambda_1^{(n)}]^2}} \quad (\text{où } |\eta| > A| = \text{const.}),$$

donc l'ordre de $|\varphi_1(x_i) - \varphi_1^{(n)}(x_i)|$ est égal à celui de ε_n,

$$|\varphi_1(x_i) - \varphi_1^{(n)}(x_i)| \leqq \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\eta}{n^2}\,\frac{\varepsilon_n^2(b-a)\max|q(x)|}{[\lambda_2^{(n)} - \lambda_1^{(n)}]^2}} + \max|\varepsilon_n|(b-a)M\right].$$

IV. Dans la démonstration de la validité du principe de Rayleigh on peut se placer au point de vue du problème de minimum. De même, pour le problème le plus simple du calcul des variations, *si la fonction $f(x, y, y')$ sous le signe de l'intégrale à varier vérifie les conditions*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geqq d > 0; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leqq -\beta < 0; \quad |f''_{yy'}| < M; \quad \begin{matrix} f'_y \\ f''_{yx} \end{matrix} \Big\} < N\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| + P|y|,$$

M, N, P *étant constants, on peut justifier le principe de Rayleigh, et dire l'ordre de la petitesse de l'erreur commise en s'arrêtant à $n^{\text{ième}}$ approximation.*

GÉOLOGIE. — *Essai d'interprétation morphologique des Bouches de Cattaro.* Note de M. **Jacques Bourcart.**

Les Bouches de Cattaro, profonde indentation que prononce la mer dans un pays de montagnes élevées, sont un des traits les plus étranges du littoral dalmate. Le port militaire de Cattaro, au pied du massif du Lovčen (1759^{m}), se trouve, à vol d'oiseau, à 10^{km} de la mer au point où elle est la plus proche; il en est séparé par deux chaînes dont l'une culmine à 768^{m}, l'autre à 586^{m}. Pour l'atteindre par bateau, il faut faire un trajet de plus de 40^{km}.

Les Bouches ont schématiquement la forme suivante : deux grands lacs maritimes, allongés dans le sens des plis, sont réunis entre eux et à la mer par deux détroits très resserrés. Le premier de ces lacs, en forme de besace, s'étend de Topla à Teodo; il est formé de deux baies en ovale, réunies par le détroit de Kumbur. Ce lac communique avec la mer par un détroit dont la largeur la plus faible est inférieure à 2^{km}. L'autre lac, le plus intérieur, présente le même étranglement en besace, les deux baies de Risano et de Cattaro ont l'une et l'autre une forme de triangle isoscèle, leurs bases se trouvant sur la même courbe, comme le détroit de Perasto qui les réunit. Une passe extrêmement resserrée, les Catene, réunit ce lac intérieur au

précédent; elle est exactement perpendiculaire à l'étranglement de Perasto, au milieu de celui-ci.

Pour expliquer une forme aussi curieuse, on a fait appel à deux hypothèses, l'effondrement sous la mer soit d'un bassin fluvial, soit d'un grand *polje* karstique. Le seul examen des cotes de profondeur ne permet pourtant pas, comme l'avait déjà démontré Sawicki, d'accepter ces explications. La profondeur est en effet presque uniforme dans les deux lacs : dans le premier, elle est de — 42 dans la baie de Topla, de — 44 dans l'étranglement de Kumbur et de — 40 dans la baie de Teodo; dans le second de — 32 dans les deux baies de Risano et de Cattaro, juste au centre de gravité du triangle, et de — 38 dans l'étranglement de Perasto. Le détroit des Catene a une profondeur de — 36; l'entrée des Bouches, entre les pointes Kobila et Luštica, de — 44. L'uniformité exclut l'hypothèse d'un creusement karstique, le manque de pente continue celui d'un creusement fluvial.

D'autre part, l'une et l'autre explication font appel à l'hypothèse générale d'un effondrement de l'Adriatique nord au Quaternaire. J'ai déjà montré que tous les faits que l'on peut observer le long des côtes obligent à abandonner cette célèbre théorie ([1]).

Dans une précédente Note ([2]), j'ai indiqué quelles étaient les lignes directrices de la tectonique de la région. C'est elle qui doit nous conduire à une explication des formes du terrain. Les deux lacs sont en effet l'un et l'autre dans des synclinaux; le synclinal autochtone est tantôt étroitement resserré, réduit à quelques mètres, tantôt ennoyé sous la mer, tantôt forme des dépressions fermées quoique imperméables ou une vallée torrentielle. Il ne peut donc avoir été, au niveau des Bouches, une ancienne vallée fluviale. Il est nécessaire de supposer que les deux synclinaux se sont abaissés sous la mer, ou qu'ils sont restés immergés quand les anticlinaux se soulevaient. Ceux-ci portent même en quelques points l'indication d'un mouvement de cette nature, sous forme de terrasses d'abrasion (Ercegnovi, environ + 50^{m}). Il ne m'a pourtant pas été possible d'y trouver de plages soulevées comme à Sabbioncello.

La caractéristique de toute la région est le développement extraordinaire qu'y prend la zone II et la forme en S des plis de la zone autochtone ou des zones charriées. Le détroit d'entrée correspond au maximum de courbure de l'arc convexe et à une fracture avec un important décrochement, les

---

([1]) *Comptes rendus*, 178, 1924, p. 953, 1086, 1298.

([2]) *Comptes rendus*, 183, 1926, p. 423.

Catene à une faille disjonctive, sans aucun rejet, au point de plus forte courbure de l'arc concave.

Je considère donc que les Bouches de Cattaro doivent leur origine à un ennoyage transversal de tous les plis, puis à leur accentuation, compliquée de leur torsion en S. Le resserrement des plis n'est pas un phénomène particulier à cette région dans l'Adriatique; j'ai déjà montré qu'il permet seul d'expliquer, dans la Kerka maritime, ou la mer de Novigrad, les lacs allongés dans les synclinaux. Les positions des fractures dans les arcs anticlinaux correspondent du reste à celles que Brouwer leur assigne, à la suite de ses belles études sur les guirlandes mouvantes des Indes néerlandaises.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Recherches sur les greffes d'Alliaire et de Chou.* Note de M. **Lucien Daniel**, transmise par M. P.-A. Dangeard.

Darwin a, l'un des premiers, signalé la lutte pour l'existence qui s'exerce entre les animaux et les végétaux, et montré que ceux-ci se défendent à l'aide de moyens mécaniques (poils et épines de leur surface) ou chimiques (tannins, acides, essences, etc.) désagréables aux déprédateurs. La production de ces substances peut être exaltée, diminuée ou même annihilée sous l'influence de divers facteurs parmi lesquels j'ai, dès le début de mes recherches, signalé le greffage.

Cette année, j'ai observé un fait curieux et très démonstratif d'influence de la symbiose sur le chimisme quantitatif des produits de défense au cours de leur développement chez deux Crucifères voisines, l'Alliaire et le Chou fourrager. La première, fréquente dans nos haies, possède une saveur et une odeur alliacées caractéristiques qui lui ont valu son nom; la seconde, dans la race dont je me suis servi, présente des feuilles larges, gaufrées, de couleur jaunâtre, à saveur piquante nettement caractérisée.

L'Alliaire, au début de la deuxième année de son développement, prend facilement sur le Chou fourrager jeune, à la condition de ne pas planter et greffer en même temps. Ayant fait au début de mars 26 greffes d'Alliaire sur Chou, j'obtins une réussite totale; les hypobiotes portaient des rameaux d'appel feuillés qui, comme à l'ordinaire, jouaient un rôle important dans la prospérité de chaque association; les épibiotes poussaient avec des vigueurs inégales suivant les exemplaires et quelques-uns se ramifièrent de bonne heure.

Un jour, à la fin d'avril, je fus très surpris de voir les pigeons d'un colombier voisin s'abattre sur mes greffes, brouter à la fois les feuilles des Choux hypobiotes, celles des épibiotes Alliaires et même les parties jeunes des

pousses, quand ils respectaient tous les témoins placés dans des conditions identiques, abstraction faite de la symbiose. Je savais que les pigeons mangent les feuilles des Choux fourragers l'hiver quand ils ne rencontrent pas d'autre nourriture meilleure, mais jamais ils ne touchent à l'Alliaire. Si donc ils s'étaient attaqués aux individus greffés, c'est que ceux-ci avaient subi une modification de leurs produits de défense, laquelle avait été perçue par ces oiseaux aux sens très développés. Je m'en rendis facilement compte en goûtant et sentant comparativement les témoins et leurs congénères greffés : la saveur et l'odeur alliacées des épibiotes s'étaient fortement atténuées ainsi que la saveur piquante des hypobiotes.

Les greffes dans lesquelles la mutilation des Alliaires avait été trop forte périrent toutes; je parvins à sauver les autres et à les défendre. D'ailleurs, au moment de leur fructification, les pigeons cessèrent de les attaquer. Quand les graines furent arrivées à maturité complète, quelques exemplaires se desséchèrent comme les témoins; les autres remontèrent et donnèrent une nouvelle floraison. A ce moment, les jeunes pousses de celles-ci et les feuilles de leurs hypobiotes Choux subirent une nouvelle attaque de la part des pigeons, mais elle fut moins vive que la première et dura moins longtemps. A ce moment, je goûtai à nouveau les épibiotes, les hypobiotes et les témoins; je trouvai que le produit alliacé des Alliaires et la saveur piquante des feuilles des Choux étaient atténués chez les types greffés par rapport aux témoins, mais cette atténuation était moindre qu'à la première végétation.

Non seulement j'ai constaté moi-même les faits, mais je les ai fait contrôler par des personnes non prévenues, habituées à l'observation scientifique, qui en ont reconnu la parfaite exactitude. Ces résultats permettent de formuler les conclusions suivantes :

1° Le greffage, chez l'Alliaire et le Chou fourrager, fait varier le chimisme quantitatif des substances spécifiques, à rôle écologique de défense, fabriquées séparément par les associés. Leur production subit des oscillations au cours de la végétation et varie suivant qu'il s'agit de plantes donnant une ou deux floraisons et aussi suivant les exemplaires dont les autorégulations consécutives à la symbiose se font avec une facilité plus ou moins grande suivant la perfection relative des bourrelets de soudure.

2° Les variations des produits écologiques de défense et leurs oscillations au cours du développement ont été perçues par les pigeons à l'aide de leurs sens du goût et de l'odorat. C'est la meilleure preuve que le physiologiste ne doit pas négliger *a priori* les sensations organoleptiques dans les questions de greffe pas plus qu'ailleurs.

CHIMIE AGRICOLE. — *Méthodes chimiques pour déterminer si les sols agricoles ont besoin d'engrais azotés et potassiques.* Note de M. **Antonin Němec**, présentée par M. A.-Th. Schlœsing.

J'ai fait connaître ([1]) une nouvelle méthode pour déterminer si les sols agricoles ont besoin d'engrais phosphatés et j'ai étudié aussi des méthodes chimiques analogues en ce qui concerne les besoins en engrais azotés et potassiques. Pour l'azote, j'ai opéré sur 30^g du sol, maintenu à l'humidité de 30 pour 100 d'eau et abandonné 14 jours à la nitrification. Après ce temps, j'ai préparé l'extrait par l'action de 100$^{cm^3}$ d'eau distillée (durée du contact, 1 heure), et sur 50$^{cm^3}$ j'ai dosé l'azote nitrique par la méthode de Clarke ([2]), modifiée pour l'analyse des sols agricoles ([3]). La comparaison des résultats fournis par l'analyse microchimique avec ceux d'essais en plein champ (exécutés par l'*Union des Stations de recherches agronomiques en Tchécoslovaquie*) a montré la nécessité de déterminer spécialement, pour chaque espèce de plantes de grande culture, la proportion limite d'azote nitrique ou de potasse qui indique si le sol a besoin ou non d'engrais azoté ou potassique.

Voici les chiffres obtenus pour quelques espèces de plantes :

Betterave sucrière.

Lieu de l'essai.	Augmentation % du rendement par l'action du nitrate de soude (50^{kg} d'azote par hectare)	Effet global de la fumure azotée.	Azote nitrique en mg par kilogr. de terre.
Kolec	— 1,0 ± 4,68	0	121,63
Jenc	6,0 ± 9,57	0	111,46
Cáslav	0,6 ± 10,89	0	56,37
Veseli (Moravie)	20,9 ± 20,7	0	34,04
Slapanice (Moravie)	16,5 ± 18,52	0	32,88
Unhost	23,5 ± 16,24	+	25,24
Hrusovany (Moravie)	28,4 ± 21,09	+	21,68
Cáslav	32,0 ± 9,20	+	14,04
Zderaz	28,33 ± 20,32	+	11,52
Chrudim	42,05 ± 7,30	+	10,43
Zelátovice (Moravie)	18,25 ± 13,16	+	3,19
Karlov (Moravie)	83,2 ± 14,10	+	2,72

([1]) Antonin Němec, *Comptes rendus*, 183, 1926, p. 314.

([2]) G.-R. Clarke, *Oxford Forestry Memoirs*, 2, 1925, p. 1.

([3]) A. Němec et K. Kvapil, *Sbornik vyzkumnych ustavu zemedelskych* (Prague, 23, 1926, p. 1).

Avoine.

Lieu de l'essai.	Augmentation % du rendement par l'action du nitrate de soude (20kg d'azote par hectare).	Effet global de la fumure azotée.	Azote nitrique en mg par kilogr. de terre.
Osek-Rokycany	—0,21 ± 1,25	0	95,18
Litovice	1,20 ± 4,68	0	68,09
Tabor	—0,22 ± 1,03	0	45,41
Plzen	1,67 ± 0,17	+	19,06
Radkov (Moravie)	6,70 ± 3,00	+	18,78
Kurovice (Moravie)	2,56 ± 1,34	+	12,85
Libejovice	5,49 ± 1,75	+	9,83
Horice	3,08 ± 0,10	+	4,97
Valecov	5,22 ± 0,47	+	3,01

D'après les chiffres obtenus, *la teneur du sol en azote nitrique au-dessous de laquelle on peut prévoir un effet favorable de l'application des engrais azotés* (nitrate du Chili), *est : pour la betterave sucrière de* 25 *à* 30mg, *pour l'orge de* 22 *à* 28mg *et pour l'avoine de* 20mg *d'azote, par kilogramme de terre séchée à l'air libre.*

Pour déterminer la potasse, j'ai appliqué, dans les dosages, la méthode colorimétrique de Cameron et Failyer ([1]) sur les extraits débarrassés préalablement des matières humides solubles par l'action de la chaux (1g) au bain-marie.

Lieu de l'essai.	Augmentation % du rendement par l'action du chlorure de potassium (100kg K^2O par hectare).	Effet global de la fumure potassique.	Potasse soluble dans l'eau en mg par kilogr. de terre.
	Betterave sucrière.		
Loucká	—14,7 ± 9,85	0	115,7
Uhrineves	— 2,5 ± 7,37	0	50,62
Veselí (Moravie)	—19,03 ± 22,4	0	66,94
Hrusovany (Moravie)	17,52 ± 21,49	0	48,66
Hospozin	1,0 ± 8,03	0	46,94
Karlov (Moravie)	9,0 ± 15,17	0	37,15
Cáslav	15,92 ± 70,07	+	9,47
Zelátovice	15,75 ± 13,19	+	7,52
	Avoine.		
Valecov	1,06 ± 1,82	0	25,95
Horice	— 1,40 ± 1,04	0	19,78
Radkov (Moravie)	4,40 ± 3,10	+	13,12
Kurovice	2,11 ± 1,34	+	6,34

([1]) Cameron et Failyer, *Journ. Amer. Chem. Society*, 25, 1903, p. 1063.

Les sols présentant une teneur en potasse soluble à l'eau supérieure à 37^{mg} par kilogramme de terre desséchée à l'air libre, n'ont guère été sensibles à l'addition des engrais potassiques, dans la culture de la betterave à sucre. Les teneurs limites cherchées ont été : pour l'orge entre 10 *et* 20^{mg}, *pour l'avoine de* 13 *à* 19^{mg}, *pour les pommes de terre d'environ* 25^{mg} *par kilogramme de terre séchée à l'air.*

PHARMACOLOGIE. — *Sur l'inversion de l'action normale de l'adrénaline.* Note de M. **Raymond-Hamet**, présentée par M. A. Desgrez.

Ayant montré [1] que, comme les alcaloïdes actifs de l'ergot, la yohimbine paralyse les terminaisons du sympathique moteur et inverse les effets normaux de l'adrénaline, il nous a paru utile de comparer ces deux cas d'inversion.

Tout d'abord, il convient de remarquer que, contrairement aux alcaloïdes de l'ergot qui sont vaso-constricteurs, la yohimbine est vaso-dilatatrice. Cela infirme définitivement la théorie émise par Cannon et Lyman [2] qui attribuaient l'inversion des effets vasculaires de l'adrénaline, à l'hypertonus vasculaire provoqué par l'ergot.

En outre, chez le chien chloralosané, on obtient toujours avec la yohimbine l'inversion des faibles doses d'adrénaline ($\frac{2}{100}$ à $\frac{5}{100}$ de milligramme), tandis qu'avec l'ergotamine — le plus actif cependant des alcaloïdes de l'ergot — il est souvent impossible de l'obtenir. Par contre, également chez le chien chloralosané, l'inversion obtenue par l'ergotamine est d'autant plus accentuée que la dose d'adrénaline est plus forte, tandis que, avec la yohimbine, il est souvent difficile d'inverser complètement l'action des doses fortes d'adrénaline (0^{mg},5 à 1^{mg}).

Enfin, contrairement aux alcaloïdes actifs de l'ergot qui, si l'on en croit Dale [3], permettent d'abolir l'action cardio-accélératrice de l'adrénaline, la yohimbine laisse subsister cette action. Notre tracé (*fig.* 1), obtenu par l'enregistrement du cœur *in situ* montre en effet que, chez le chien chloralosané ayant reçu une dose moyenne de yohimbine (2^{mg} par kilogramme), l'adrénaline est bien devenue hypotensive, mais a conservé son action cardiaque normale. Bien plus, quand un chien chloralosané a reçu des doses sublétales de yohimbine (20^{mg} par kilogramme), l'adrénaline ne peut plus agir sur les vaisseaux maximalement dilatés, mais conserve encore son pouvoir cardio-accélérateur habituel (*fig.* 2).

---

(1) Raymond-Hamet, *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 2074.

(2) Cannon et Lyman, *The American Journal of Physiology*, 31, 1913, p. 376-398.

(3) Dale, *The Journal of Physiology*, 34, 1906, p. 176.

Puisque, chez le chien chloralosané soumis à l'action de la yohimbine, l'adrénaline, quoique conservant son action cardio-accélératrice normale, ne détermine le plus souvent qu'une hypotension immédiate et non précédée — comme c'est généralement le cas avec les alcaloïdes de l'ergot —

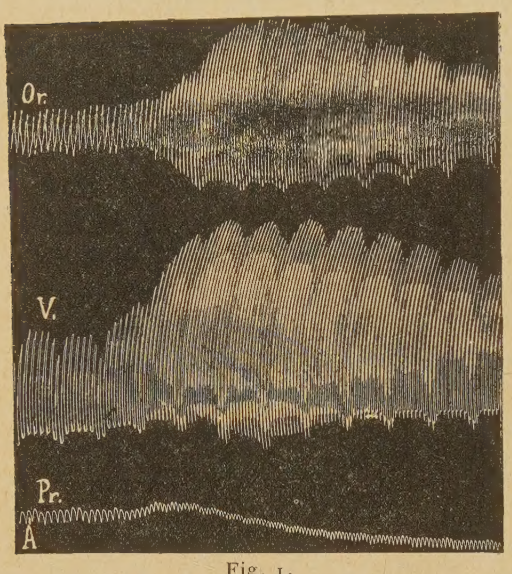


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 1. — Tracé cardiographique par la méthode du cœur *in situ* et tracé de la pression carotidienne enregistrée au moyen du manomètre à mercure. — Or, tracé de l'oreillette; V, tracé du ventricule; Pr, tracé de la pression carotidienne. — En A, injection de $\frac{5}{100}$ de milligramme d'adrénaline dans la saphène d'une chienne de 13^{kg} chloralosanée et ayant reçu 26^{mg} de chlorhydrate de yohimbine pur de Gustrow en injection intraveineuse. — Tracé réduit de moitié.

Fig. 2. — Tracé de la pression carotidienne enregistrée au moyen du manomètre à mercure. — En A, injection de $\frac{5}{100}$ de milligramme d'adrénaline dans la saphène d'un chien de 10^{kg} chloralosané ayant ses vagues coupés, soumis à la respiration artificielle et ayant reçu 200^{mg} de chlorhydrate de yohimbine en quatre injections intraveineuses successives. — Temps en secondes. — Tracé grandeur naturelle.

d'une hypertension passagère, il est difficile d'admettre avec Dale [1] que cette hypertension passagère, que provoque très souvent l'adrénaline chez l'animal ergotisé, tient à la persistance dans ces cas du pouvoir cardio-accélérateur de l'adrénaline.

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE. — *Sur le virus claveleux traité par diverses aldéhydes.* Note de M. **E. Ducloux** et M[lle] **G. Cordier**, présentée par M. A. Desgrez.

Les travaux de Ramon et Zœller sur les anatoxines ont ouvert aux chercheurs un champ d'études, et si les vaccins formolés retiennent l'attention lorsqu'il s'agit de cultures microbiennes, les résultats obtenus avec les virus formolés méritent aussi d'être enregistrés. Nos recherches portent sur le

(1) Dale, *The Journal of Physiology*, 46, 1913, p. 293.

virus claveleux que nous entretenons régulièrement *in vivo* au laboratoire, depuis plusieurs années, pour la fabrication du vaccin préparé selon la technique de E. Ducloux ([1]). Des essais de culture *in vitro* sur des milieux à base de fragments d'organes (reins de moutons, de cobayes) additionnés de sérums homologues ont été négatifs, de même que les essais de culture du claveau sur les mélanges au $\frac{1}{10}$ de bouillon Martin, sérum anticlaveleux d'une part, bouillon ordinaire, sérum anticlaveleux d'autre part.

Nous avons alors cherché un procédé d'atténuation du virus cultivé *in vivo* par action de quelques aldéhydes de la série grasse : le méthanal ou aldéhyde formique CH^2O. l'éthanal C^2H^4O et le butanal C^4H^8O. Notre technique fut la suivante : le produit des pustules claveleuses pesé, broyé, repris par l'eau physiologique, puis soumis à différentes actions mécaniques est enfin filtré avant d'être traité par les produits chimiques choisis.

Aldéhyde formique. — Le virus préparé comme nous venons de le voir est réparti en plusieurs flacons stérilisés dans lesquels nous ajoutons le méthanal à des taux qui, depuis le début de nos expériences, en janvier dernier, ont varié de 5 pour 1000 à 1,25 pour 1000 dernier chiffre auquel nous nous sommes arrêtés après de nombreux essais sur des lots de 4 à 5 moutons. Ces vaccins sont ensuite placés à l'obscurité, à la température de 14°-15° et agités une fois par jour durant 48 heures. Passé ce délai, ils sont répartis en tubes scellés.

Avec les chiffres de 5 et 3 pour 1 000 les réactions vaccinales ont été nulles (chaque mouton ayant reçu 1^{cm^3} en injection sous-cutanée). La contre-épreuve réalisée 14 jours après sous forme d'inoculation par piqûres multiples, de virus fraîchement prélevé, n'est pas satisfaisante. Tout le lot vacciné à l'aide de virus formulé à 5 pour 1000 réagit comme les témoins : induration, rougeur, pustule. Sur le lot à 3 pour 1000 la moitié environ, ne réagit pas, les autres présentent une forte induration. Ces vaccins hypothétiques à 5 et 3 pour 1 000 préparés le 7 janvier avaient été utilisés le 12 du même mois. Des essais tentés sur des lots de 6 à 7 moutons avec les virus formolés à 2,5 pour 1000, 2 pour 1000, 1,75 pour 1000 âgés d'un mois sont de plus en plus satisfaisants, au fur et à mesure que le taux en aldéhyde est plus faible (dose injectée : 1^{cm^3} sous-cutanée). La réaction vaccinale est parfois nulle, parfois fugace sous forme d'une très petite induration visible 4 à 5 jours après. A la contre-épreuve pratiquée 15 à 16 jours plus tard, soit par piqûres multiples avec application de lymphe virulente, soit par inoculation intradermique de la même lymphe, les lots semblent bénéficier de l'immunité, à peine remarque-t-on une faible induration, sans rougeur, sur l'un des moutons du lot à 2 pour 1000 alors que les témoins donnent une pustule classique.

([1]) *C. R. Soc. Biol.*, 72, 1912, p. 279 et 709; 75, 1913, p. 380.

Devant ces résultats, nous avons cherché à renforcer encore notre vaccin en diminuant le taux du méthanal. A cet effet, un lot de 3 moutons est traité avec du virus à 1 pour 1000 en formol, à raison de 1^{cm^3} par animal. Deux d'entre eux faisant une réaction forte nous avons cherché la valeur d'un virus formolé à 1,25 pour 1000 à raison de $0^{cm^3},5$ par animal; 35 moutons ont été ainsi vaccinés dont 10 gardés durant un mois à l'Institut Arloing et 25 autres dans une exploitation au milieu d'un important troupeau; sur ces 35 moutons aucune réaction vaccinale n'a été visible. Dans le même troupeau 25 moutons avaient reçu chacun $0^{cm^3},5$ de virus à 1,5 pour 1000 sans aucune réaction. La contre-épreuve par piqûres multiples sur les 10 animaux gardés à l'Institut, a donné pour un seul une très légère induration sans rougeur ni suintement qui n'a été perceptible au doigt que durant 48 heures, rien pour les autres. Les 5 témoins ont eu au 6e jour une pustule très forte dont on a arrêté l'évolution par des injections de sérum. En outre de ces expériences, il a été procédé à la vaccination de 250 moutons dans une région où la clavelée avait déjà causé la mort de plusieurs têtes. Les animaux revus 15 jours après étaient en parfait état de santé et l'épizootie s'était arrêtée.

Éthanal et butanal. — Des expériences similaires ont été exécutées avec des virus traités par l'aldéhyde éthylique et par l'aldéhyde butylique à des taux décroissants. Nous ne pouvons rapporter ici tous nos essais; nous n'avons pas retenu de procédé pratique quant au butanal, par contre l'éthanal nous a fourni au taux de 2,75 pour 1000 et à la dose de $0^{cm^3},5$ par animal des résultats fort intéressants. Les derniers enregistrés sont consécutifs à la vaccination de 40 moutons dont 30 pris dans la même exploitation que les 25 au vaccin formolé à 1,25 pour 1000. Les 10 autres ont été gardés à l'Institut. Sur l'ensemble, 12 ont présenté, 5 jours après la vaccination, une induration qui a disparu vers les 9e et 10e jours. La contre-épreuve, dans les conditions habituelles (application de virus) sur les 10 moutons de l'Institut, n'a été suivie d'aucune réaction. Les 5 témoins par contre ont eu une formation de pustule très accusée.

Il ressort de ces expériences :

1° Une facilité de préparation et une garantie de conservation;

2° L'action inoffensive des virus aldéhydés puisque dans les troupeaux où ils ont été utilisés, il n'a pas été constaté de clavelée;

3° L'efficacité certaine de leur emploi étant donnée, d'une part : l'arrêt de la mortalité dans les régions infectées où ils ont servi à la vaccination, d'autre part, l'immunité solide qui est résultée de leur utilisation.

La séance est levée à 15^{h}25^m.

A. Lx.